UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Examen Final 03/03/2026

APELLIDO DEL ALUMNO: .... **NOMBRE:** ....

CORRIGIÓ: .... **REVISÓ:** ....

T1	T2	P1	P2	P3	P4	CALIFICACIÓN

Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).
Su examen se mostrará una vez corregido.

T1- a- **Enuncie** el teorema de Green con las hipótesis correspondientes y **deduzca**, a partir del mismo, una fórmula que permita calcular el área de una región plana.

b- **Calcule** la circulación de $\overline{F}(x,y)$ a lo largo de la frontera de la región plana definida por $y \geq x^2 - 2x$; $y \leq 2x$ .Sabiendo que $DF = \begin{pmatrix} 5y & 5x \\ 2x & 4y \end{pmatrix}$. Indique en un gráfico la orientación elegida para la curva.

T2- a- **Explique** cómo es el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares y **calcule** el jacobiano correspondiente.

b- **Plantee** $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ en cartesiana y en polares, siendo D la región del plano que cumple $x^2+y^2 \leq 4 \wedge |y| \leq x$

P1- **Exprese,** mediante dos integrales distintas, la masa del cuerpo definido por:

$$z \leqslant 4 - x^2 \quad \wedge \quad x + y \leqslant 4 \quad \wedge \quad y \geqslant -2 \quad \wedge \quad z \geqslant 0$$

si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano X Y .

P2 - Sea $z = f(x,y)$ una función definida implícitamente por $xz + z + y + \ln(z - xy) = 10$ en un disco de centro en el punto (2 , 1).

a- **Obtenga** la fórmula de aproximación lineal de f en dicho entorno.

b- **Halle** una ecuación de la recta normal al gráfico de la función f en (2, 1, f(2, 1)) y **analice** si corta a la superficie de ecuación $x + y^2 = 7$ (en caso afirmativo obtenga el o los puntos)

P3 – Dadas las familias de curvas: $y = k\,x^3$; $x^2 + a\,y^2 = C$; **halle** el valor de la constante "a" de modo que ambas familias resulten ortogonales.

P4 - **Calcule** el flujo del campo $\overline{f}(x,y,z) = (\,7x + y^z\ ;\ \ln x^2 - h(x,z); -3z\,)$ con $h \in C^1$, a través del trozo de la superficie de ecuación $z = 5 - 4x^2 - 4y^2$ con $z \geq 1$. Indique gráficamente la orientación considerada para la superficie.

(resuelto por Sylvina)

AM2	Final	HOJA Nº 1/3 FECHA 3-3-26

T1 a) Enunciar el teorema de Green con las hipótesis correspondientes y deducir, a partir del mismo, una fórmula que permita calcular el área de una región plana.

- D una región compacta de $\mathbb{R}^2$
- C curva suave a trozos, frontera de D con orientación positiva
- $\bar{f} = (P, Q) \in C^1$

$$\Rightarrow \oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{l} = \iint_D Q'_x - P'_y \, dx\,dy$$

Para calcular el área de una región plana, parametrizo la curva frontera C y hallo y uso T. Green:

$$A_D = \iint_D dx\,dy \longrightarrow \text{uso } \bar{f}_{(x,y)} = (0, x) \longrightarrow Q'_x = 1 \quad P'_y = 0$$

$$\longrightarrow Q'_x - P'_y = 1$$

$$A_D = \iint_D dx\,dy \overset{\text{G}}{=} \oint_{C^+} (0, 1)\, d\bar{l}$$

b) Calcular la circ. de $\bar{F}_{(x,y)}$ a lo largo de la frontera de la región plana definida por $y \geq x^2 - 2x$, $y \leq 2x$ sabiendo que $D\bar{F}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 5y & 5x \\ 2x & 4y \end{pmatrix}$. Indicar la orientación elegida

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 2x \end{cases} \longrightarrow x^2 - 2x = 2x \qquad x=0 \quad x=4$$

$$x^2 - 4x = 0 = x(x-4)$$

$$\boxed{0 \leq x \leq 4}$$

$$x^2 - 2x \leq y \leq 2x$$

$$Df = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix}$$

C curva cerrada +
D región compacta
$\bar{f} \in C^1$ → T. Green

$$\oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{l} = \iint_D Q'_x - P'_y \, dx\,dy = \iint_D 2x - 5x \, dx\,dy =$$

$$= \int_0^4 \int_{x^2-2x}^{2x} -3x \, dy\,dx = \int_0^4 -3x\,(2x - x^2 + 2x)\, dx = \int_0^4 -12x^2 + 3x^3\, dx = -64$$

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{l} = -64}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

#2 a) Explicar cómo es el cambio de variables de coordenadas cartesianas a polares y calcular el jacobiano correspondiente

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad T: D^* \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T(r,t) = (r\cos(t), r\,sen(t))$$

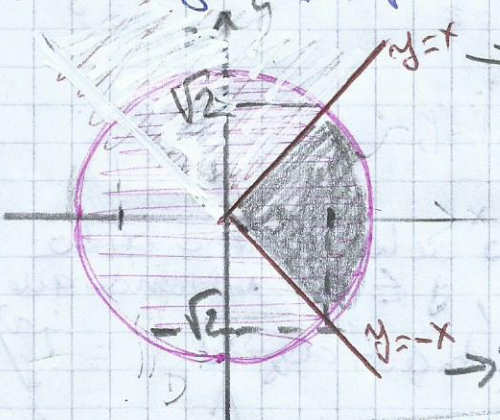
$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \overset{c.v}{=} \iint_{D^*} |J|\, f(T(r,t))\,dr\,dt$$

donde $|J| = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_t \\ y'_r & y'_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(t) & -r\,sen(t) \\ sen(t) & r\cos(t) \end{vmatrix} =$

$$= r\cos^2(t) - (-r\,sen^2(t)) = r\underbrace{(\cos^2(t)+sen^2(t))}_{1} = r$$

$$\boxed{|J| = r}$$

b) Plantear $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ en cartesianas y en polares siendo D la región del plano que cumple $x^2+y^2 \le 4$, $|y| \le x$



$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ |y| \le x \end{cases} \to 2y^2 = 4$$

$$|y| = \sqrt{2}$$

$$|x| = \sqrt{4-y^2}$$

$$I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{2}}^{0}\int_{-y}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy + \int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{y}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy =$$

$$\overset{c.v.}{=} \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^2 \underset{\sqrt{r^2}}{r}\;\overset{Jac}{r}\,dr\,dt$$

(resuelto por Sylvina)

Am2	Final	HOJA N° 2/3 — FECHA 3-3-26

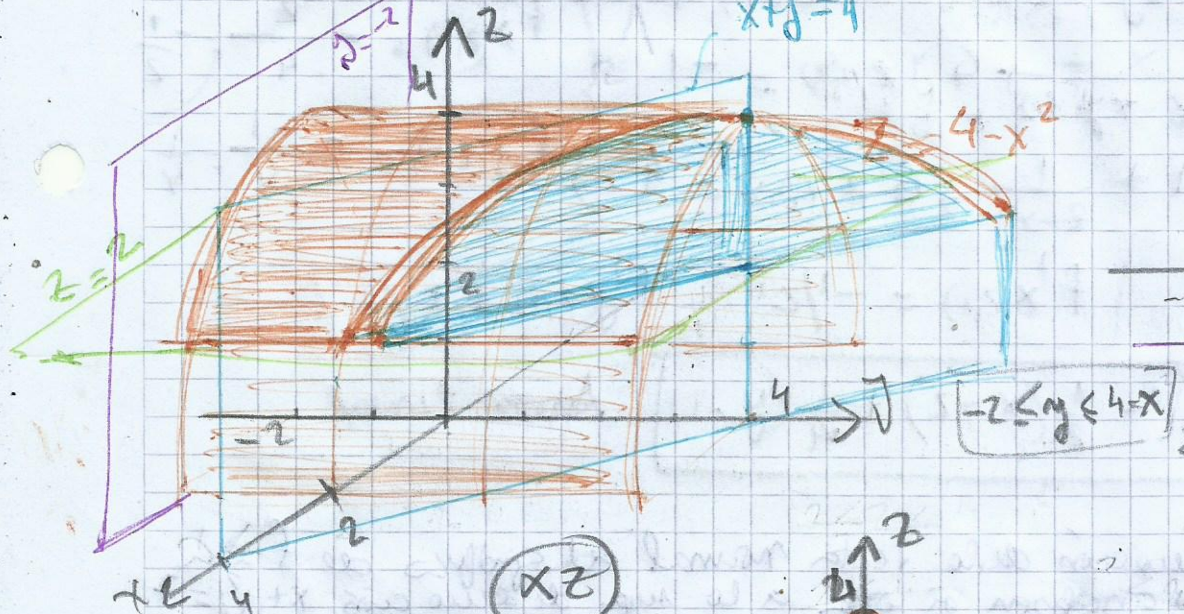
(P1) Expresar mediante dos integrales distintas, la masa del cuerpo definido por

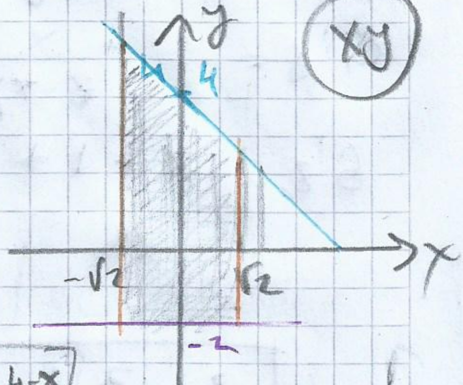
$$W: \quad z \le 4 - x^2 \;,\; x + y \le 4 \;,\; y \ge -2 \;,\; z \ge 2$$

si su densidad, en cada punto, es proporcional a la distancia desde el punto al plano xy

proporcional

$$\delta(x,y,z) = k\,|z| \quad z \ge 2 \longrightarrow \boxed{\delta(x,y,z) = kz}$$





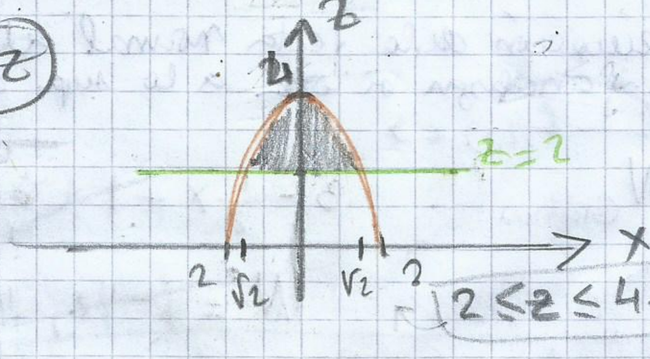
$\boxed{-2 \le y \le 4 - x}$

$2 \le z \le 4 - x^2$

$2 \le 4 - x^2$

$|x| \le \sqrt{2}$

$\boxed{-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}}$



$\boxed{2 \le z \le 4 - x^2}$

$$\text{Masa}_W = \iiint_W \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = k\iiint_W z\,dx\,dy\,dz$$

$$\boxed{\text{Masa}_W = k\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-2}^{4-x}\int_{2}^{4-x^2} z\,dz\,dy\,dx = k\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{2}^{4-x^2}\int_{2}^{4-x} z\,dy\,dz\,dx}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

(P2) Sea $z = f(x,y)$ una función definida implícitamente por $xz + z + y + \ln(z - xy) = 10$ en un disco de centro $(2,1)$

a) obtener la fórmula de aproximación lineal de f en dicho entorno

$z = 3$

$$z = \overset{3}{f(2,1)} + f'x(2,1)(x-2) + f'y(2,1)(y-1)$$

$$\alpha TFI: \quad G(x,y,z) = xz + z + y + \ln(z - xy) = 10$$

$$G'x = z - \frac{y}{z-xy} \rightarrow G'x(2,1,3) = 2$$

$$G'y = 1 - \frac{x}{z-xy} \rightarrow G'y(2,1,3) = -1$$

$$G'z = x + 1 + \frac{1}{z-xy} \rightarrow G'z(2,1,3) = 4.$$

$$f'x(2,1) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$f'y(2,1) = -\frac{-1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$f'x(2,1) = -1/2 \qquad f'y(2,1) = +1/4$$

$$\boxed{z = 3 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(y-1)}$$ Aprox lineal

b) Hallar una ecuación de la recta normal al gráfico de f en $(2,1,f(2,1))$ y analizar si corta a la sup. de ecuación $x+y^2=7$

$f(2,1) = 3$

$$N_{PT} \,//\, N_{\text{Gráfico}}: \quad 3 - \frac{1}{2}x + 1 + \frac{y}{4} - \frac{1}{4} - z = 0$$

$$N = (-1/2, 1/4, -1)$$

$$\boxed{\mathbb{L}: \beta(t) = (-2, 1, -4)t + (2, 1, 3)}$$

$$\beta(t) = (\underbrace{2-2t}_{x}, \underbrace{1+t}_{y}, \underbrace{3-4t}_{z})$$

$$\mathbb{L} \cap \; x + y^2 = 7$$

$$(2-2t) + (1+t)^2 = 7$$

$$2 - \cancel{2t} + 1 + \cancel{2t} + t^2 = 7$$

$$t^2 + 3 = 7 \rightarrow t^2 = 4 \rightarrow t = \pm 2$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_1 &= (-2, 3, -5) \\ P_2 &= (6, -1, 11) \end{aligned}}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)

AM2	Final	HOJA N° 3/3 — FECHA 3-3-26

P3 Dados las familias de curvas $y = kx^3$, $x^2+ay^2=c$ hallar el valor de la constante "a" de modo que ambas familias resulten ortogonales

Hallo curva ortogonal a $y=kx^3$

$y = kx^3 \longrightarrow k = y/x^3$

$\hookrightarrow y' = k\,3x^2 = \frac{y}{\cancel{x^3}}\cdot 3\cancel{x^2}$

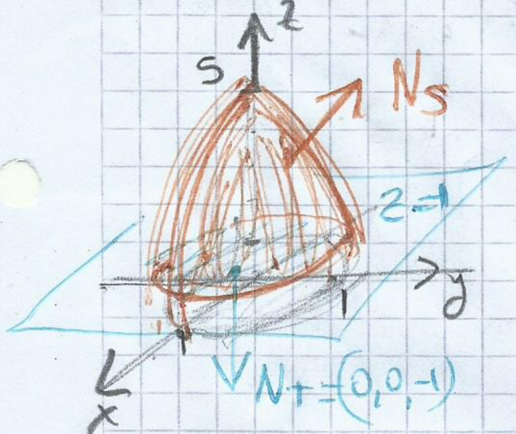
$y' = \frac{3y}{x} \longrightarrow y'_{\perp} = \frac{-x}{3y} = \frac{dy}{dx} \longrightarrow -x\,dx = 3y\,dy$

integro m.a.m $-\frac{x^2}{2}+k = \frac{3y^2}{2}$

$\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}y^2 = k \longrightarrow x^2+3y^2=c \quad // \quad x^2+ay^2=c$

$\boxed{a=3}$

P4 Calcular el flujo del campo $\bar F(x,y,z) = (7x+y^2; \ln(x^2)-h(x,z); -3z)$ con $h \in C^1$ a través del trozo de sup. de ec. $z = 5-4x^2-4y^2$ con $z \geq 1$. Indicar la orientación considerada.



$S\cup T = S_F \Rightarrow \oiint_{S_F} \bar F\, d\bar s = \iint_S \bar F\, d\bar s + \iint_T \bar F\, d\bar s$

$S\cup T$ sup cerrada, encierra W
↳ orientada al ext.

W región de $\mathbb{R}^3$

$\bar F \in C^1$ (componentes funciones elementales)

$\Rightarrow$ T. Gauss : $\oiint_S \bar F\, d\bar s = \iiint_W div(\bar F)\, dvol =$

$= \iiint_W 7-3\; dx\,dy\,dz = 4 \underbrace{\iiint_W dvol}_{\text{paraboloide}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{2}$

h: $z=5 \to z=1 \to \boxed{h=4}$

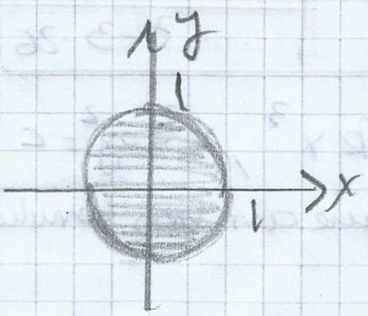
en $z=1 \to 4x^2+4y^2=4$

$\boxed{x^2+y^2=1}$ $r=1$

$= 4 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 4}{2} \longrightarrow \boxed{\oiint_{S\cup T} \bar F\, d\bar s = 8\pi}$

$\longrightarrow$

NOTA



$$\iint_T \bar{F}\, d\bar{s} = \iint_{Txy} \bar{F} \cdot N \, dx\,dy =$$

$$= \iint_{Txy} \left(7x+y^2,\ \ln(x^2) - h(x,y),\ -3z\right)(0,0,-1)\, dx\,dy =$$

$$= \iint_{Txy} 3z \, dx\,dy \overset{z=1}{=} 3 \underbrace{\boxed{\iint_{Txy} dx\,dy}}_{\text{Área }D} = 3 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$\boxed{\iint_T \bar{F}\, d\bar{s} = 3\pi}$$

$$\underbrace{\oiint_{S\cup T} \bar{F}\, d\bar{s}}_{8\pi} = \iint_S \bar{F}\, d\bar{s} + \underbrace{\iint_T \bar{F}\, d\bar{s}}_{3\pi}$$

$$\boxed{\iint_S \bar{F}\, d\bar{s} = 5\pi}$$

(resuelto por Sylvina)